

Über
Funktionenräume
und
Homotopiegruppen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ulrich Seip

aus Berlin

1964

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e. V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

Über
Funktionenräume
und
Homotopiegruppen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Ulrich Seip
aus Berlin

Gutachter:

Prof.Dr. K.P. Grotemeyer und Prof.Dr. A. Dinghas

Mündliche Prüfungen am 29. bzw. 26. November 1963

Tag der Promotion:

29. FEB. 1964



Einleitung

Bei der Untersuchung von Funktionenräumen (Funktion= stetige Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen) spielt in der Homotopietheorie die sog. kompakt-offene Topologie der Funktionenräume die wichtigste Rolle. Es erschien uns daher interessant, die bisherigen wesentlichen Resultate einerseits zusammenzufassen, andererseits sowohl Beweise zu vereinfachen, als auch diese Theorie durch neue Sätze abzurunden.

Dabei beweisen wir zunächst in Kapitel I die beiden folgenden Sätze von Jackson [11], die auf Ergebnissen von Fox [5] aufbauen und gewissermaßen die Fundamentalsätze sind.

Satz 1: Es seien A und B T_2 -Räume, die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen. Dann sind die beiden Funktionenräume $X^{A \times B}$ und $(X^A)^B$ topologisch gleich.

Satz 2: Es seien A und B T_2 -Räume und A sei lokal kompakt. Dann sind die beiden Funktionenräume $X^{A \times B}$ und $(X^A)^B$ ebenfalls homöomorph.

In Kapitel II definieren wir zunächst zwei Funktoren; einen ko- und einen kontravarianten Funktor auf folgende Art: Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion, so sei $\hat{f}: X^A \rightarrow Y^A$ definiert durch $\hat{f}(g) = f \circ g$ für $g \in X^A$. Ist andererseits $\varphi: A \rightarrow B$ eine Funktion, so sei $\bar{\varphi}: X^B \rightarrow X^A$ definiert durch $\bar{\varphi}(g) = g \circ \varphi$ für $g \in X^B$. Neben diesen Funktoren betrachten wir noch die sog. Projektionsfunktion $p: X^A \rightarrow X^A$ für $A_1 \subset A$, die durch $p(f) = f|_{A_1}$

für $f \in X^A$ definiert wird. Mit Hilfe dieser Funktoren und der Projektionsfunktion beweisen wir dann leicht die folgenden Sätze, die teilweise eine Verschärfung der bisherigen Sätze sind; hauptsächlich aber die bisherigen Beweise (man vgl. Hu [8]) stark vereinfachen.

Satz 4: Es sei A ein topologischer Raum und $A_1 \subset A$ ein Retrakt von A . Dann können wir 1. X^{A_1} topologisch in X^A einbetten und 2. ist das so erhaltene topologische Bild von X^{A_1} ein Retrakt von X^A .

Satz 5: Es sei A ein T_2 -Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt oder lokal kompakt ist. A_1 sei ein abgeschlossener Unterraum von A und $(A \times 0) \cup (A_1 \times I)$ ein Retrakt von $A \times I$. Dann hat die Projektionsfunktion die absolute Homotopie-Überlagerungs-Eigenschaft (speziell: p ist eine Faserung).

Satz 6: Es seien X und Y beliebige topologische Räume, I das abgeschlossene Einheitsintervall, $p: X^I \rightarrow X$ die Projektionsfunktion, $g: Y^I \rightarrow X$ eine beliebige Funktion. Dann existiert eine Funktion $h: Y^I \rightarrow X^I$, für die $p \circ h = g$ gilt.

Dazwischen betrachten wir kurz die folgende Abbildung: $\alpha: X^A \times Y^X \rightarrow Y^A$ sei definiert durch $\alpha(f, g) = g \circ f$ für $f \in X^A$, $g \in Y^X$. Wir stellen uns die Frage: Unter welchen Voraussetzungen ist α eine Funktion? Hierzu beweisen wir den

Satz 3: Es seien A und Y beliebige Räume, X ein lokal kompakter T_2 -Raum. Dann ist α eine Funktion.

Schließlich stellen wir in Kapitel II folgende Fragen: Es seien $h: I \times X \rightarrow Y$, $k: I \times A \rightarrow B$ Homotopien der Funktionen h_0 , h_1 bzw. k_0, k_1 . Unter welchen Voraussetzungen existieren

dann Homotopien $H: I \times X^A \rightarrow Y^A$ bzw. $K: I \times X^B \rightarrow X^A$, derart daß $H_0 = \hat{h}_0$, $H_1 = \hat{h}_1$ bzw. $K_0 = \bar{k}_0$, $K_1 = \bar{k}_1$ gilt. Hierzu beweisen wir die Sätze:

Satz 7: Es sei X ein lokal kompakter T_2 -Raum, Y und A beliebige Räume, $h: I \times X \rightarrow Y$ eine beliebige Homotopie der Funktionen h_0 und h_1 . Dann existiert eine Homotopie $H: I \times X^A \rightarrow Y^A$, für die gilt: $H_0 = \hat{h}_0$, $H_1 = \hat{h}_1$.

Satz 8: Es sei B ein lokal kompakter T_2 -Raum, X und A beliebige Räume, $k: I \times A \rightarrow B$ eine beliebige Homotopie der Funktionen k_0 und k_1 . Dann existiert eine Homotopie $K: I \times X^B \rightarrow X^A$, für die gilt: $K_0 = \bar{k}_0$, $K_1 = \bar{k}_1$.

Die Folgerungen bzgl. Homotopie-Äquivalenz liegen dann auf der Hand. Abschließend beweisen wir einen fast offensichtlichen Satz über Retrakte:

Satz 9: Es sei $X_1 \subset X$ und X_1^A sei ein Retrakt von X^A . Dann ist X_1 ein Retrakt von X .

In Kapitel III ziehen wir zunächst drei Folgerungen aus den Sätzen von Kapitel II bzgl. der Hurewicz'schen Homotopiegruppen. Dann verallgemeinern wir im Sinne von Fox [6] den Begriff des Funktionenraumes, indem wir Teilräume definieren. Und zwar bezeichnet $(\lambda; \chi_\mu)^{(A; A_\mu)}$ den Unterraum von λ^A , der alle Funktionen f enthält, für die $f(A_\mu) \subset X_\mu$ für alle $\mu \in M$ (einer Indexmenge) gilt.

Schließlich definieren wir verallgemeinerte Homotopiegruppen, die wir mit $\pi^{(A; A_\mu)}(\chi; \chi_\mu, x_0)$ bezeichnen. Die Elemente dieser Gruppen sind die Homotopieklassen der Funktionen $g \in (\chi; \chi_\mu, x_0)^{(I \times A; I \times A_\mu, \dot{I} \times A)}$. Diese verallgemei-

nerten Homotopiegruppen enthalten z.B. als Spezialfälle die Hurewicz'schen, die Fox'schen und die Abe'schen Gruppen. Wir untersuchen diese Gruppen allerdings nicht genauer, sondern beschränken uns auf folgendes (unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle Räume lokal kompakte T_2 -Räume sind): Es gilt: $\pi^{(A;A_\mu)}(X;X_\mu,x_0) \approx \pi_1((X;X_\mu)^{(A;A_\mu)},0)$, womit wir die Gruppen auf die Fundamentalgruppe von Funktionenräumen zurückgeführt haben. Jede Funktion $f:(X;X_\mu,x_0) \rightarrow (Y;Y_\mu,y_0)$ induziert einen Homomorphismus $f_*:\pi^{(A;A_\mu)}(X;X_\mu,x_0) \rightarrow \pi^{(A;A_\mu)}(Y;Y_\mu,y_0)$ und jede Funktion $\alpha:(A;A_\mu) \rightarrow (B;B_\mu)$ einen Homomorphismus $\alpha_*:\pi^{(B;B_\mu)}(X;X_\mu,x_0) \rightarrow \pi^{(A;A_\mu)}(X;X_\mu,x_0)$.

Abschließend ordnen wir jedem Element $\alpha \in \pi_p(S^r)$ einen Homomorphismus $\alpha_*:\pi_{n+r}(X,x_0) \rightarrow \pi_{n+p}(X,x_0)$ zu. Ist $p \geq r$, so ist α_* ein Homomorphismus in aufsteigender Richtung. Es scheint uns eine nähere Untersuchung dieses Homomorphismus interessant; allerdings konnten wir bisher keine nennenswerten Ergebnisse erzielen.

Die Dissertation wurde zum größten Teil in München angefertigt und mit Herrn Prof.Dr. K.P. Grotemeyer besprochen.

Kapitel I

Es seien A und X beliebige topologische Räume, und $\Omega = X^A$ die Menge aller Funktionen von A in X . Dabei verstehen wir unter dem Wort "Funktion" grundsätzlich eine stetige Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen Raum. Für zwei Teilmengen $A_1 \subset A$, $X_1 \subset X$ bezeichne $M(A_1, X_1)$ die Menge aller Funktionen $f \in \Omega$, für die $f(A_1) \subset X_1$ gilt. Dann definiert die Gesamtheit aller Mengen $M(K, O)$, wobei $K \subset A$ kompakt und $O \subset X$ offen ist, aufgefaßt als Subbasis die kompakt-offene Topologie (k-o-Topologie) von Ω . Im folgenden seien alle auftretenden Funktionenräume grundsätzlich mit der k-o-Topologie versehen.

Zunächst beweisen wir ein Lemma von Jackson [44]

Lemma 1: Es sei A ein T_2 -Raum und $\{U\}$ eine Subbasis für die Topologie von X . Dann bildet die Gesamtheit aller Mengen $M(K, U)$, wobei $K \subset A$ kompakt und $U \in \{U\}$ ist, eine Subbasis für die k-o-Topologie von Ω .

Beweis: Wir haben zu zeigen: Ist $K \subset A$ kompakt, $O \subset X$ offen, und ist $f \in M(K, O)$, so existieren kompakte Teilmengen K_i von A und offene Mengen $U_i \in \{U\}$ für $i=1, \dots, n$, derart daß $f \in \bigcap_i M(K_i, U_i) \subset M(K, O)$ gilt. Da O offen in X ist, gilt $O = \bigcup_{\alpha \in J} \bigcap_i U_i^\alpha$ mit $U_i^\alpha \in \{U\}$. Für jedes $a \in K$ ist daher $f(a) \in \bigcap_i U_i^\alpha$ für mindestens ein $\alpha \in J$ (J bezeichnet eine Indexmenge), welches wir mit $\bigcap_i U_i^a$ bezeichnen. f ist stetig, folglich besitzt jedes a eine in K (K als Unterraum von A aufge-

faßt) offene Umgebung V^a , derart daß $f(V^a) \subset \bigcap_i^{n_a} U_i^a$. Da K als Unterraum ein kompakter T_2 -Raum ist, ist K regulär. Daher besitzt jedes $a \in K$ eine in K offene Umgebung W^a , deren abgeschlossene Hülle K^a (bzgl. K) enthalten ist in V^a . Die Gesamtheit $\{W^a | a \in K\}$ ist offene Überdeckung des kompakten Unterraumes K und folglich überdecken endlich viele W^a , die wir mit $W_1, \dots, W_k$ bezeichnen, ebenfalls ganz K . Die zu den W_j gehörenden K^a , V^a , $\bigcap_i^{n_a} U_i^a$ bezeichnen wir durch K_j , V_j , $\bigcap_i^{n_j} U_i^j$. Die K_j sind offenbar kompakt und es gilt: $f(K_j) \subset f(V_j) \subset \bigcap_i^{n_j} U_i^j \subset 0$ für $j=1, \dots, k$, woraus folgt: $f \in \bigcap_j^k \{ \bigcap_i^{n_j} M(K_j, U_i^j) \}$. Es sei nun $g \in \Omega$ und $g \in \bigcap_j^k \{ \bigcap_i^{n_j} M(K_j, U_i^j) \}$. Ist dann $a \in K$, so $a \in W_j \subset K_j$ für irgendein j . Folglich $g(a) \in \bigcap_i^{n_j} U_i^j \subset 0$, d.h. $g \in M(K, 0)$ und damit gilt: $f \in \bigcap_j^k \{ \bigcap_i^{n_j} M(K_j, U_i^j) \} \subset M(K, 0)$.

Es seien A, B, X drei vorgelegte beliebige topologische Räume. Die Funktionenräume X^A , $X^{A \times B}$, $(X^A)^B$ bezeichnen wir mit Ω , ϕ , ψ . Jeder Funktion $\varphi \in \phi$ ordnen wir die Abbildung $\varphi^*: B \rightarrow \Omega$ zu, die durch $\{\varphi^*(b)\} (a) = \varphi(a, b)$ definiert ist. Daß $\varphi^* \in \psi$ ist, wird im folgenden Lemma von Fox [5] bewiesen.

Lemma 2: Ist $\varphi \in \phi = X^{A \times B}$, so ist $\varphi^* \in \psi = \Omega^B = (X^A)^B$.

Beweis: Es sei $M = M(K, 0)$ eine Subbasismenge von Ω und b_0 ein beliebiger Punkt aus $\varphi^{*-1}(M)$. Dann gilt per def.

$K \times b_0 \subset \varphi^{-1}(0) = \bigcup_{\alpha \in I} \{U_\alpha \times V_\alpha\}$, wobei die U_α offen in A , die V_α offen in B sind. Da K kompakt ist, ist $K \times b_0$ enthalten

in der Vereinigung endlich vieler $U_\alpha \times V_\alpha$, die wir mit

$U_i \times V_i$ ($i=1, \dots, n$) bezeichnen. Da jedes V_i offene Umgebung

von b_0 ist, ist auch $\bigcap_i V_i = V$ offene Umgebung von b_0 und es gilt: $V \subset \psi^{*-1}(M)$.

Die Zuordnung $\psi \rightarrow \psi^*$ definiert auf Grund von Lemma 2 eine Abbildung $\mathfrak{S}: \phi \rightarrow \psi$. Wir stellen nun natürlich folgende drei Fragen: 1) Unter welchen Voraussetzungen ist $\mathfrak{S}$ eine Funktion? 2) Unter welchen Voraussetzungen ist $\mathfrak{S}$ eine Abbildung "auf"? 3) Unter welchen Voraussetzungen ist $\mathfrak{S}$ eine topologische Funktion von ϕ auf den Unterraum $\mathfrak{S}(\phi)$? Offensichtlich ist $\mathfrak{S}$ ein-eindeutig.

Zur Frage 1 beweisen wir folgendes Lemma von Jackson [11]

Lemma 3: Ist B ein T_2 -Raum, so ist $\mathfrak{S}: \phi \rightarrow \psi$ eine Funktion.

Beweis: Auf Grund von Lemma 1 wissen wir, daß die Teilmengen $M\{L, M(K, 0)\}$ von ψ , wobei K alle kompakten Teilmengen von A , L alle kompakten Teilmengen von B und 0 alle offenen Mengen von X durchlaufen, eine Subbasis von ψ bilden. Per def. gilt aber: $\mathfrak{S}^{-1}(M\{L, M(K, 0)\}) = M(K \times L, 0)$ und $K \times L$ ist kompakt.

Zu Frage 2 beweisen wir zwei Sätze von Fox [5]

Lemma 4: Ist A ein regulärer und lokal kompakter Raum, so ist $\mathfrak{S}$ eine Abbildung "auf".

Beweis: Es genügt zu zeigen: Ist $\psi^* \in \psi$, so ist ψ , definiert durch $\psi(a, b) = \{\psi^*(b)\} (a) \in \phi$. Es sei 0 eine offene Menge in X und (a_0, b_0) ein Punkt von $\psi^{-1}(0)$. Da $\psi^*(b_0)$ stetig in a ist, gibt es eine offene Umgebung U_0 von a_0 , derart daß $\psi^*(b_0) \in M(U_0, 0)$. Und da A regulär und lokal kompakt ist, gibt es hierzu eine offene Umgebung U

von a_0 , deren abgeschlossene Hülle U^- kompakt ist und in U_0 liegt. Es folgt $\varphi^*(b_0) \in M(U^-, 0)$ und diese Menge ist offen in Ω . Daher existiert eine offene Umgebung V von b_0 mit $\varphi^*(V) \subset M(U^-, 0) \subset M(U, 0)$. D.h.: $(a_0, b_0) \in U \times V \subset \varphi^{-1}(0)$.

Lemma 5: Die Räume A und B mögen dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügen. Dann ist σ eine Abbildung "auf".

Beweis: Es genügt wieder zu zeigen: Ist $\varphi^* \in \Psi$, so ist $\varphi \in \Phi$. Angenommen, es ist 0 eine offene Menge in X und $\varphi^{-1}(0)$ ist nicht offen. Dann gibt es einen Punkt (a_0, b_0) in $\varphi^{-1}(0)$, der auch zur abgeschlossenen Hülle H^- der Komplementärmenge $H = (A \times B) \setminus \varphi^{-1}(0)$ gehört. $\{G_n(a_0, b_0)\}$ sei eine offene abzählbare Umgebungsbasis des Punktes (a_0, b_0) . Zu jedem n wählen wir einen Punkt $(a_n, b_n) \in H \cap \{\bigcap_{i=1}^n G_i(a_0, b_0)\}$. Da $\varphi^*(b_0)$ stetig in a ist, existiert eine offene Umgebung $U(a_0)$, derart daß $\varphi^*(b_0) \in M(U, 0)$. Wir setzen $K = U \cap \{\bigcup_n a_n\}$. Dann ist K kompakt und $\varphi^*(b_0) \in M(K, 0) \subset M(U, 0)$. Es gibt daher eine offene Umgebung $V(b_0)$ mit $\varphi^*(V) \subset M(K, 0)$. Andererseits gibt es ein N , so daß für alle $n \geq N$ gilt: $a_n \in U$, $b_n \in V$, d.h. $\varphi(a_n, b_n) \in 0$. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Wahl der Punkte (a_n, b_n) , die ja aus H sein sollten. Folglich ist φ stetig.

Wir kommen jetzt zu Frage 4. Hierzu beweisen wir wieder ein Lemma von Jackson [11]

Lemma 6: Es seien A und B T_2 -Räume. Dann ist σ eine topologische Funktion von ϕ in ψ .

Beweis: σ ist eineindeutig, Funktion nach Lemma 3. Es bleibt zu zeigen: σ^{-1} ist Funktion auf dem Unterraum

$\mathfrak{S}(\phi)$ von Ψ . Dazu genügt es, nachzuweisen, daß $\mathfrak{S}$ eine offene Funktion von ϕ auf $\mathfrak{S}(\phi)$ ist. D.h.: ist $C \in A \times B$ kompakt, $0 \in X$ offen, so ist $\mathfrak{S}(M(C, 0))$ offen im Unterraum $\mathfrak{S}(\phi)$. Es sei $\varphi^* \in \mathfrak{S}(M(C, 0))$ und $\mathfrak{S}(\varphi) = \varphi^*$, mit $\varphi \in M(C, 0)$. $p_A: A \times B \rightarrow A$ und $p_B: A \times B \rightarrow B$ seien die Projektionen und wir setzen $p_A^C = p_A(C)$, $p_B^C = p_B(C)$. Zu jedem Punkt $c = (a, b) \in C$ wählen wir offene Umgebungen $U_o(c)$ von a im Unterraum p_A^C bzw. $V_o(c)$ von b in p_B^C , derart daß $\varphi(U_o \times V_o) \subset 0$ gilt. Da φ stetig ist, ist dies möglich. p_A^C und p_B^C sind, als Unterräume betrachtet, kompakte T_2 -Räume und folglich regulär. Es gibt daher offene Umgebungen $U(c)$, $V(c)$ mit $U(c) \subset U^-(c) \subset U_o(c)$, $V(c) \subset V^-(c) \subset V_o(c)$ von a bzw. b in p_A^C bzw. p_B^C . Die Gesamtheit $\{(U(c) \times V(c)) \cap C \mid c \in C\}$ ist eine offene Überdeckung des Unterraumes C und es genügen daher endlich viele Mengen dieses Mengensystems, die wir mit $(U^i \times V^i) \cap C$ ($i=1, \dots, n$) bezeichnen, um C zu überdecken. Die zugehörigen $U^-(c)$, $U_o(c)$, $V^-(c)$, $V_o(c)$ bezeichnen wir entsprechend mit U^{-i} , U_o^i , V^{-i} , V_o^i . Die U^{-i} , V^{-i} sind kompakt und es gilt $\{\varphi^*(V^{-i})\}(U^{-i}) = \varphi(U^{-i} \times V^{-i}) \subset 0$ für alle i . Daher ist $\varphi^* \in \{\bigcap_{i=1}^n M(V^{-i}, M(U^{-i}, 0))\} \cap \mathfrak{S}(\phi)$. Ist andererseits $\varphi^* \in \Psi$ und $\varphi^* \in \{\bigcap_{i=1}^n M(V^{-i}, M(U^{-i}, 0))\} \cap \mathfrak{S}(\phi)$, so existiert ein $\varphi \in \phi$ mit $\mathfrak{S}(\varphi) = \varphi^*$. Ist $c = (a, b) \in C$, so ist $c \in U^i \times V^i \subset U^{-i} \times V^{-i}$ für mindestens ein i und damit erhalten wir: $\varphi^* \in M(V^{-i}, M(U^{-i}, 0))$. Daraus folgt $\varphi(c) \in 0$ für jedes $c \in C$, also ist $\varphi \in M(C, 0)$. Folglich ist $\varphi^* \in \mathfrak{S}(M(C, 0))$, und wir erhalten: $\varphi^* \in \{\bigcap_{i=1}^n M(V^{-i}, M(U^{-i}, 0))\} \cap \mathfrak{S}(\phi) \subset \mathfrak{S}(M(C, 0))$.

Nun haben wir den Weg bereitet für die beiden folgen-

den Sätze von Jackson [11]

Satz 1: Es seien A und B T_2 -Räume und A sei lokal kompakt. Dann ist $\mathfrak{C}: X^{A \times B} \rightarrow (X^A)^B$ eine topologische Funktion "auf".

Satz 2: Es seien A und B T_2 -Räume, die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen. Dann ist $\mathfrak{C}: X^{A \times B} \rightarrow (X^A)^B$ eine topologische Funktion "auf".

Bevor wir zu den induzierten Funktionen übergehen, beweisen wir noch zwei Lemmata, die wir zum Beweis später erscheinender Sätze benutzen werden.

Lemma 7: Die Abbildung $\omega: X^A \times A \rightarrow X$, definiert durch $\omega(f, a) = f(a)$ ist dann und nur dann eine Funktion, wenn für jeden Raum B die Abbildung $\mathfrak{C}: X^{A \times B} \rightarrow (X^A)^B$ eine Abbildung "auf" ist.

Beweis: 1. Es sei ω eine Funktion und $\varphi^* \in (X^A)^B$. Wir definieren $\chi: A \times B \rightarrow X^A$ durch $\chi(a, b) = (\varphi^*(b), a)$. χ ist offenbar eine Funktion und wir setzen $\varphi = \omega \cdot \chi$. Dann ist $\varphi \in X^{A \times B}$ und es gilt: $\{\mathfrak{C}(\varphi)(b)\}(a) = \varphi(a, b) = \omega \cdot \chi(a, b) = \omega(\varphi^*(b), a) = \{\varphi^*(b)\}(a)$. Daraus folgt $\mathfrak{C}(\varphi) = \varphi^*$ und daher ist $\mathfrak{C}$ eine Abbildung "auf". - 2. Es sei $\mathfrak{C}$ eine Abbildung "auf" für alle B . Wir wählen speziell $B = X^A$ und $\varphi^* \in (X^A)^{(X^A)}$ sei die Identität auf X^A . Nach Voraussetzung existiert eine Funktion $\varphi \in X^{A \times X^A}$ mit $\mathfrak{C}(\varphi) = \varphi^*$. Es ist aber $\varphi(a, f) = \{\varphi^*(f)\}(a) = f(a) = \omega(f, a)$ und da φ eine Funktion ist, ist auch ω eine Funktion.

Lemma 8: Es sei A ein T_2 -Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt oder lokal kompakt ist. A_1 sei ein ab-

geschlossener Unterraum von A . Betrachtet man die beiden Funktionenräume $X^{(A \times O) \cup (A_1 \times I)} = X^T$ (wobei T die Relativtopologie bzgl. $A \times I$ trägt, und I das abgeschlossene Einheitsintervall, versehen mit seiner natürlichen Topologie, bezeichnet) und $U = \{(f, h) \in X^A \times (X^{A_1})^I \mid f|_{A_1} = h(O)\}$, wobei U als Unterraum von $X^A \times (X^{A_1})^I$ aufgefaßt wird, und die Abbildung $\alpha: X^T \rightarrow U$, definiert durch $\alpha(g) = (f, h)$ mit $f(a) = g(a, O)$ für $a \in A$, $\{h(t)\}(a) = g(a, t)$ für $a \in A_1$, $t \in I$, so gilt: α ist topologische Funktion "auf".

Beweis: Wir definieren $\bar{\alpha}: X^T \rightarrow \bar{U} = \{(\bar{f}, \bar{h}) \in X^{A \times O} \times X^{A_1 \times I} \mid f|_{A_1 \times O} = h|_{A_1 \times O}\}$ durch $\bar{\alpha}(g) = (g|_{A \times O}, g|_{A_1 \times I})$. (U trägt ebenfalls Relativtopologie). Da A_1 abgeschlossen ist, ist $\bar{\alpha}$ sicher eine eindeutige Abbildung "auf". Es sei $M(K, O)$ eine subbasis-offene Menge von X^T . Dann gilt: $M(K, O) = M(K_1, O) \cap M(K_2, O)$, wobei wir $K_1 = K \cap (A \times O)$, $K_2 = K \cap (A_1 \times I)$ gesetzt haben und die K_i sind kompakt. Es ist $\bar{\alpha}(M(K, O)) = \{M(K_1, O) \times M(K_2, O)\} \cap \bar{U}$, d.h. $\bar{\alpha}$ ist eine offene Abbildung. Andererseits bilden die Mengen $\{M(K_1, O_1) \times M(K_2, O_2)\} \cap \bar{U}$, wobei K_1 kompakt in $A \times O$, K_2 kompakt in $A_1 \times I$, O_1 und O_2 offen in X sind, eine Subbasis von $\bar{U}$. Es ist $\bar{\alpha}^{-1}(\{M(K_1, O_1) \times M(K_2, O_2)\} \cap \bar{U}) = M(K_1, O_1) \cap M(K_2, O_2)$ in X^T . Folglich ist $\bar{\alpha}$ eine Funktion. Schließlich definieren wir eine Abbildung $\tau: \bar{U} \rightarrow U$ durch $\{\tau(\bar{f})\}(a) = \bar{f}(a, O)$, $\{\{\tau(\bar{h})\}(t)\}(a) = \bar{h}(a, t)$. τ ist ganz offensichtlich eine topologische Funktion "auf". Da $\tau \circ \bar{\alpha} = \alpha$, ist das Lemma bewiesen.

Kapitel II

Definition 1: Es seien X, Y, A, B beliebige topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$, $\varphi: A \rightarrow B$ zwei beliebig vorgegebene Funktionen. Dann induzieren f bzw. φ Abbildungen $\hat{f}_A: X^A \rightarrow Y^A$ bzw. $\bar{\varphi}_X: X^B \rightarrow X^A$, die durch $\hat{f}_A(g) = f \circ g$ ($g \in X^A$) bzw. $\bar{\varphi}_X(h) = h \circ \varphi$ ($h \in X^B$) definiert werden.

Der Kürze wegen schreiben wir im folgenden für $\hat{f}_A, \bar{\varphi}_X$ einfach $\hat{f}, \bar{\varphi}$, wenn keine Unklarheiten über die Räume A bzw. X entstehen können.

Die den Funktionen $f: X \rightarrow Y$ bzw. $\varphi: A \rightarrow B$ zugeordneten Abbildungen $\hat{f}_A$ bzw. $\bar{\varphi}_X$ sind offenbar ebenfalls Funktionen. Es gelten die Regeln: $\widehat{f_2 \circ f_1} = \hat{f}_2 \circ \hat{f}_1$, $\overline{\varphi_2 \circ \varphi_1} = \bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_2$. Sind f bzw. φ Identitäten, so auch $\hat{f}$ bzw. $\bar{\varphi}$. Hieraus folgen die Sätze:

Lemma 9: Es sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, die aus allen topologischen Räumen und allen Funktionen besteht. Dann definieren die Zuordnungen $X \mapsto X^A$, $f \mapsto \hat{f}_A$ für einen beliebig vorgegebenen Raum A einen kovarianten Funktor von $\mathcal{C}$ in sich.

Lemma 10: Es sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, die aus allen topologischen Räumen und allen Funktionen besteht. Dann definieren die Zuordnungen $A \mapsto X^A$, $\varphi \mapsto \bar{\varphi}_X$ für einen beliebig vorgegebenen Raum X einen kontravarianten Funktor von $\mathcal{C}$ in sich.

Folgerung 1: Sind X und Y homöomorphe topologische Räume, so sind für jeden topologischen Raum A auch X^A und Y^A homöomorph.

Folgerung 2: Sind A und B homöomorphe topologische Räume,

so sind für jeden topologischen Raum X auch X^A und X^B homöomorph.

Definition 2: Es seien A, X, Y beliebige topologische Räume. Dann definieren wir eine Abbildung $\alpha: X^A \times Y^X \rightarrow Y^A$ durch $\alpha(f, g) = g \circ f$ ($f \in X^A$, $g \in Y^X$).

Es stellt sich hier wieder die natürliche Frage: Wann ist α eine Funktion? Wir beweisen hierzu folgenden Satz: Man vgl. Bourbaki [43]

Satz 3: Es seien A und Y beliebige topologische Räume, X ein lokal kompakter T_2 -Raum. Dann ist die eben definierte Abbildung $\alpha: X^A \times Y^X \rightarrow Y^A$ eine Funktion.

Beweis: Es sei $(f_0, g_0) \in \alpha^{-1}(M(K, 0)) = \{(f, g) \mid g(f(K)) \subset 0\}$, wobei K eine kompakte Teilmenge von A , 0 eine offene Teilmenge von Y ist. Dann ist $f_0(K) \subset g_0^{-1}(0)$ und $f_0(K)$ ist eine kompakte Teilmenge von X . Da X ein lokal kompakter T_2 -Raum ist, existiert eine kompakte Umgebung L von $f_0(K)$ mit $L \subset g_0^{-1}(0)$. Folglich ist $f_0 \in M(K, L^0)$, $g_0 \in M(L, 0)$. Außerdem gilt offensichtlich: $(f_0, g_0) \in M(K, L^0) \times M(L, 0) \subset \alpha^{-1}(M(K, 0))$.

Definition 3: Es sei A ein beliebiger topologischer Raum und A_1 ein beliebiger Unterraum von A . Dann definieren wir für jeden Raum X die Abbildung $p_X: X^A \rightarrow X^{A_1}$ durch $p_X(f) = f|_{A_1}$ für $f \in X^A$.

Der Kürze wegen schreiben wir im folgenden wieder für p_X einfach p , wenn keine Unklarheiten entstehen können. p ist offenbar stets eine Funktion und heißt natürliche Projektion.

Wir beweisen nun einen Satz über Retrakte.

Satz 4: Es sei A ein topologischer Raum und $A_1 \subset A$ ein

Retrakt von A mit $\varphi: A \rightarrow A_1$ als Retraktion. Dann gilt:

$\bar{\varphi}: X^A \rightarrow X^{A_1}$ ist topologische Funktion von X^A auf $\bar{\varphi}(X^{A_1})$ und $\bar{\varphi}(X^{A_1})$ ist ein Retrakt von X^A .

Beweis: Wir betrachten neben $\bar{\varphi}$ noch die natürliche Projektion $p: X^A \rightarrow X^{A_1}$. Es gilt zunächst $p \circ \bar{\varphi} = \text{Identität auf } X^{A_1}$; denn $(p \circ \bar{\varphi})(f) = f \circ \varphi|_{A_1} = f$. $\bar{\varphi}$ ist daher dann topologisch "in", wenn $\bar{\varphi}(M(K, 0))$ offen im Unterraum $\bar{\varphi}(X^{A_1})$ von X^A ist. Es ist aber $\bar{\varphi}(M(K, 0))_{\text{bzgl. } X^{A_1}} = (M(K, 0))_{\text{bzgl. } X^A} \cap \bar{\varphi}(X^{A_1})$. Ist K kompakte Teilmenge von A_1 , so ist K auch kompakt in A und damit ist $\bar{\varphi}$ offene Funktion bzgl. $\bar{\varphi}(X^{A_1})$. Es gilt weiter: $\bar{\varphi} \circ p: X^A \rightarrow \bar{\varphi}(X^{A_1})$ ist eine Retraktion; denn für $(\bar{\varphi} \circ p)(f)$ mit $f = \bar{\varphi}(g)$, $g \in X^{A_1}$ gilt: $(\bar{\varphi} \circ p)(f) = (\bar{\varphi} \circ p \circ \bar{\varphi})(g) = \bar{\varphi}(g) = f$.

Da wir die Funktionenräume speziell im Hinblick auf die Homotopietheorie untersuchen, ist es wesentlich, zu wissen, wann für $A_1 \subset A$ die natürliche Projektion $p: X^A \rightarrow X^{A_1}$ die absolute Homotopie-Überlagerungs-Eigenschaft hat. Dabei hat allgemein eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ die absolute Homotopie-Überlagerungs-Eigenschaft, wenn gilt: Ist Z ein beliebiger topologischer Raum, $g: Z \rightarrow X$ eine beliebige Funktion, $h^*: I \times Z \rightarrow Y$ eine beliebige Homotopie der Funktion $f \circ g$, so gibt es eine Homotopie $h: I \times Z \rightarrow X$ von g , für die gilt: $f \circ h = h^*$. Hierzu beweisen wir den Satz:

Satz 5: Es sei A ein T_2 -Raum, der dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt, oder der lokal kompakt ist. A_1 sei ein ab-

geschlossener Unterraum von A und $T = (A \times 0) \cup (A_1 \times I)$ ein Retrakt von $A \times I$. Dann hat die natürliche Projektion $p: X^A \rightarrow X^{A_1}$ die absolute Homotopie-Überlagerungs-Eigenschaft.

Beweis: Zunächst bezeichnen wir alle Abbildungen und Funktionen, die wir im Beweis benutzen werden:

$g: A \times I \rightarrow T$ sei eine Retraktion, $g: Z \rightarrow X^A$ sei eine beliebige Funktion, definiert auf einem beliebigen Raum Z ,

$h^*: I \times Z \rightarrow X^{A_1}$ sei eine beliebige Homotopie von $p \circ g$, $\alpha: X^T \rightarrow U$

sei die in Lemma 8 auftretende topologische Funktion,

$\sigma_1: (X^{A_1})^{I \times Z} \rightarrow ((X^{A_1})^I)^Z$, $\sigma_2: X^{A \times I} \rightarrow (X^A)^I$, $\sigma_3^{-1}: ((X^A)^I)^Z \rightarrow (X^A)^{I \times Z}$

seien wie üblich definiert. σ_2 ist topologische Funktion,

σ_1 und σ_3^{-1} sind Abbildungen (nach Satz 1 bzw. 2,

Lemma 2 bzw. 4). Da $h^*: I \times Z \rightarrow X^{A_1}$, ist $\sigma_1(h^*): Z \rightarrow (X^{A_1})^I$ eine

Funktion. Wir definieren $\tilde{h}: Z \rightarrow U$ durch $\tilde{h}(z) = \{g(z), \sigma_1(h^*)(z)\}$,

$\tilde{h}$ ist Abbildung; denn es gilt $\{(\sigma_1 \circ h^*)(z)\}(0) = h^*(0, z) =$

$= (p \circ g)(z) = g(z)|_{A_1}$. $\tilde{h}$ ist eine Funktion, da g und $\sigma(h^*)$

Funktionen sind. Wir betrachten nun die Kette: $U \xrightarrow{\alpha^{-1}} X^T \xrightarrow{\tilde{\sigma}} X^{A \times I} \xrightarrow{\sigma_2} (X^A)^I$ und die induzierte Kette $U \xrightarrow{\hat{\alpha}^{-1}} (X^T)^Z \xrightarrow{\hat{\sigma}} (X^{A \times I})^Z$

$\xrightarrow{\hat{\sigma}_2} ((X^A)^I)^Z \xrightarrow{\sigma_3^{-1}} (X^A)^{I \times Z}$, die durch die Abbildung σ_3^{-1} verlängert wurde. Dann haben wir: $\sigma_3^{-1} \circ \hat{\sigma}_2 \circ \hat{\sigma} \circ \hat{\alpha}^{-1}(\tilde{h}) \stackrel{\text{def}}{=} h: I \times Z \rightarrow X^A$

ist eine Funktion. Nach Konstruktion gilt $p \circ h = h^*$, $h|_{0 \times Z} = g$.

Als nächstes beweisen wir einen Satz, der uns die Existenz einer Lösung des Liftungsproblems in speziellen Fällen sichert. Dieser Satz kann allerdings verschärft werden. Man vgl. Hu [8]

Satz 6: Es seien X und Y beliebige Räume, I das abge-

geschlossene Einheitsintervall. $p: X^I \rightarrow X$ sei definiert durch $p(f) = f(0)$ und $g: Y^I \rightarrow X$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es eine Funktion $h: Y^I \rightarrow X^I$ mit $p \circ h = g$.

Beweis: Nach Lemma 4 und 7 ist $\omega: Y^I \times I \rightarrow Y$ eine Funktion ($\omega(f, t) = f(t)$). Wir definieren $\alpha \in Y^{I \times I \times Y^I}$ durch $\alpha(s, t, f) = \omega(f, t + s(1-t))$ und betrachten die Kette: $Y^{I \times I \times Y^I} \rightarrow \mathcal{C}_1(Y^I)^{I \times Y^I} \xrightarrow{\hat{g}} X^{I \times Y^I} \xrightarrow{\mathcal{C}_2} (X^I)^{Y^I}$, wobei $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ wie üblich definiert sind. Wir setzen $h = \mathcal{C}_2 \circ \hat{g} \circ \mathcal{C}_1(\alpha)$. Dann ist $h: Y^I \rightarrow X^I$ eine Funktion und es gilt nach Konstruktion: $p \circ h = g$.

Als nächstes stellen wir uns folgende Fragen: Gegeben seien topologische Räume A, B, X, Y und beliebige Homotopien $h: I \times X \rightarrow Y$, $k: I \times A \rightarrow B$. Unter welchen Voraussetzungen induzieren dann h bzw. k Homotopien $\check{h}$ bzw. $\tilde{k}$ mit $\check{h}: I \times X^A \rightarrow Y^A$ bzw. $\tilde{k}: I \times X^B \rightarrow X^A$, derart daß gilt: $\check{h}|_{0 \times X^A} = \hat{h}_0$, $\check{h}|_{1 \times X^A} = \hat{h}_1$; $\tilde{k}|_{0 \times X^B} = \bar{k}_0$, $\tilde{k}|_{1 \times X^B} = \bar{k}_1$. $h_t: X \rightarrow Y$ ist hier natürlich durch $h_t(x) = h(t, x)$ definiert und entsprechend $k_t: A \rightarrow B$ durch $k_t(a) = k(t, a)$.

Wir definieren zunächst:

Definition 4: Es seien X, Y, A, B beliebige topologische Räume und $h: I \times X \rightarrow Y$, $k: I \times A \rightarrow B$ beliebige Homotopien der Funktionen h_0 und h_1 bzw. k_0 und k_1 . Wir definieren

dann die durch h bzw. k induzierten Abbildungen $\check{h}: I \times X^A \rightarrow Y^A$ durch $\check{h}(t, f) = \hat{h}_t(f)$ und $\tilde{k}: I \times X^B \rightarrow X^A$ durch $\tilde{k}(t, f) = \bar{k}_t(f)$.

Offenbar gilt $\check{h}|_{0 \times X^A} = \hat{h}_0$, $\check{h}|_{1 \times X^A} = \hat{h}_1$; $\tilde{k}|_{0 \times X^B} = \bar{k}_0$, $\tilde{k}|_{1 \times X^B} = \bar{k}_1$. Wir beweisen nun zwei Sätze, die uns die Stetigkeit der Abbildungen h und k unter nicht allzu scharfen Voraussetzungen gewährleisten.

Satz 7: Es sei X ein lokal kompakter T_2 -Raum, Y und A beliebige Räume. $h: I \times X \rightarrow Y$ sei eine Homotopie der Funktionen h_0 und h_1 . Dann ist $\check{h}: I \times X^A \rightarrow Y^A$ eine Homotopie der Funktionen $\hat{h}_0$ und $\hat{h}_1$.

Beweis: Wir haben die Stetigkeit der Abbildung $\check{h}$ zu zeigen. Es sei $(t, f) \in \check{h}^{-1}(M(K, 0)) = \bigcup_{t \in J} \{t \times M(K, \tilde{O}_t)\}$, wobei $\tilde{O}_t = h_t^{-1}(0)$. Es ist also $f(K) \subset \tilde{O}_t$ und $f(K)$ ist kompakt. Da X ein T_2 -Raum ist, ist $f(K)$ auch abgeschlossen. $\tilde{O}_t$ ist eine offene Umgebung der abgeschlossenen und kompakten Teilmenge $f(K)$ des lokal kompakten T_2 -Raumes X . Daher existiert eine abgeschlossene kompakte Umgebung K_t von $f(K)$, derart daß gilt: $f(K) \subset K_t^0 \subset \tilde{O}_t$ (K_t^0 bezeichnet das Innere von K_t). $h^{-1}(0)$ ist offene Umgebung der kompakten Menge $t \times K_t$. Zu jedem $x \in K_t$ existieren daher offene Mengen $O_x(t) \subset I$ und $O(x) \subset X$, derart daß $O_x(t) \times O(x) \subset h^{-1}(0)$. Da K_t kompakt ist, genügen endlich viele $O(x)$, die wir mit $O(x_i)$ bezeichnen ($i=1, \dots, n$), um K_t zu überdecken. Es folgt: $h^{-1}(0) \supset \bigcup_i \{O_{x_i}(t) \times O(x_i)\} \supset \bigcup_i \{(\bigcap_j O_{x_j}(t)) \times O(x_i)\} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i \{\tilde{O}(t) \times O(x_i)\} = \tilde{O}(t) \times \bigcup_i O(x_i) \supset \tilde{O}(t) \times K_t \supset t \times K_t$. Hieraus folgt die Existenz einer offenen Umgebung $O(t)$ von t , für die gilt: $t \times K_t \subset O(t) \times K_t \subset O^{-}(t) \times K_t \subset h^{-1}(0)$. Wir behaupten nun: $(t, f) \in O(t) \times M(K, K_t^0) \subset \check{h}^{-1}(M(K, 0))$. 1. $(t, f) \in O(t) \times M(K, K_t^0)$ ist klar; denn $f(K) \subset K_t^0$. 2. Es sei $(t', f') \in O(t) \times M(K, K_t^0)$. Dann gilt $\check{h}(t', f') = \hat{h}_{t'}(f') = h_{t'} \circ f'$. Es ist aber $f'(K) \subset K_t^0 \subset K_t$ und $h(t' \times K_t) \subset h(O(t) \times K_t) \subset O$. Folglich ist $(t', f') \in \check{h}^{-1}(M(K, 0))$.

Satz 8: Es sei B ein lokal kompakter T_2 -Raum, X und A

beliebige Räume. $k: I \times A \rightarrow B$ sei eine Homotopie der Funktionen k_0 und k_1 . Dann ist $\tilde{k}: I \times X^B \rightarrow X^A$ eine Homotopie der Funktionen $\tilde{k}_0$ und $\tilde{k}_1$.

Beweis: Wir haben wieder die Stetigkeit der Abbildung $\tilde{k}$ zu zeigen. Es sei $(t, f) \in \tilde{k}^{-1}(M(K, 0)) = \bigcup_{t \in I} \{t \times M(L_t, 0)\}$, wobei $L_t = k_t(K)$. Es ist also $f(L_t) \subset 0$, d.h. $L_t \subset f^{-1}(0)$. $f^{-1}(0)$ ist eine offene Umgebung der kompakten und abgeschlossenen Teilmenge L_t des lokal kompakten T_2 -Raumes B . Daher existiert eine abgeschlossene und kompakte Umgebung $\tilde{L}_t$ von L_t , derart daß gilt: $L_t \subset \tilde{L}_t^0 \subset \tilde{L}_t \subset f^{-1}(0)$. Daraus folgt: $t \times K \subset k^{-1}(L_t) \subset k^{-1}(\tilde{L}_t^0) \subset k^{-1}(\tilde{L}_t)$. $k^{-1}(\tilde{L}_t^0)$ ist offene Umgebung der kompakten Menge $t \times K$. Zu jedem $a \in K$ existieren daher offene Mengen $O_a(t)$ und $O(a)$, derart daß $O_a(t) \times O(a) \subset k^{-1}(\tilde{L}_t^0)$. Da K kompakt ist, genügen endlich viele $O(a)$, die wir mit $O(a_i)$ bezeichnen ($i=1, \dots, n$), um K zu überdecken. Es folgt: $k^{-1}(\tilde{L}_t^0) \supset \bigcup_i \{O_{a_i}(t) \times O(a_i)\} \supset \bigcup_i \{(\bigcap_j O_{a_j}(t) \times O(a_i))\} = \bigcup_i \{O(t) \times O(a_i)\} = O(t) \times \bigcup_i O(a_i) \supset O(t) \times K \supset t \times K$ und wir erhalten: $t \times K \subset O(t) \times K \subset O^-(t) \times K \subset \{k^{-1}(\tilde{L}_t^0)\}^- \subset k^{-1}(\tilde{L}_t)$, hierbei wurde die Stetigkeit von k benutzt. Wir behaupten nun: $(t, f) \in O(t) \times M(\tilde{L}_t, 0) \subset \tilde{k}^{-1}(M(K, 0))$. 1. $(t, f) \in O(t) \times M(\tilde{L}_t, 0)$ ist klar; denn $f(\tilde{L}_t) \subset 0$. 2. Es sei $(t', f') \in O(t) \times M(\tilde{L}_t, 0)$. Dann gilt $\tilde{k}(t', f') = \tilde{k}_t(f') = f' \cdot k_t$. Es ist aber $k_t(K) \subset \tilde{L}_t$ und damit $f' \cdot k_t(K) \subset 0$. Folglich ist $(t', f') \in \tilde{k}^{-1}(M(K, 0))$.

Aus Satz 7 und 8 folgen nun Aussagen über die Homotopie-Äquivalenz von Funktionenräumen.

Zunächst definieren wir allgemein: Zwei Räume, X und Y , heißen homotop äquivalent, wenn es Funktionen $f: X \rightarrow Y$

und $g:Y \rightarrow X$ gibt, derart daß $g \circ f \simeq \text{Identität auf } X$, $f \circ g \simeq \text{Identität auf } Y$ ist.

Wir formulieren nun die Folgerungen:

Folgerung 1: Es seien X und Y lokal kompakte und homotop äquivalente T_2 -Räume. Dann sind für jeden topologischen Raum A auch die Funktionenräume X^A und Y^A homotop äquivalent.

Folgerung 2: Es seien A und B lokal kompakte und homotop äquivalente T_2 -Räume. Dann sind für jeden topologischen Raum X auch die Funktionenräume X^A und X^B homotop äquivalent.

Die Beweise folgen aus Satz 7 und 8 in Verbindung mit den Lemmata 9 und 10.

Es ist klar, daß die Umkehrung von Folgerung 1 immer richtig ist; denn jeden Raum X können wir mittels der Funktion $j: X \rightarrow X^A$ (definiert durch $j(x) = f_x$, wobei f_x durch $f_x(a) = x$ für alle $a \in A$ definiert ist) topologisch in X^A einbetten, und für jede Projektion $p_a: X^A \rightarrow X$ (definiert durch $p_a(f) = f(a)$) gilt $p_a \circ j = \text{Identität auf } X$.

Abschließend beweisen wir noch einen Satz über Retrakte, der fast offensichtlich ist.

Satz 9: Es sei $X_1 \subset X$ und $r: X^A \rightarrow X_1^A$ eine Retraktion. Dann ist X_1 Retrakt von X .

Beweis: Wir betrachten die Funktion $p_a \circ r \circ j: X \rightarrow X_1$. Für diese Funktion gilt: $(p_a \circ r \circ j)(x) = x$ für $x \in X_1$. Daher ist $p_a \circ r \circ j$ Retraktion von X auf X_1 .

Kapitel III

In diesem Kapitel ziehen wir zunächst einige Folgerungen aus den Sätzen von Kapitel II; dann definieren wir allgemeinere Homotopiegruppen (die z.B. als Spezialfälle die Hurewicz'schen, die Fox'schen und die Abelschen Gruppen enthalten) und führen diese neuen Homotopiegruppen unter gewissen Voraussetzungen zurück auf Fundamentalgruppen von Funktionenräumen. Dann definieren wir noch durch Funktionen induzierte Homomorphismen bzgl. dieser Gruppen, aus denen wir z.B. leicht die monomorphe Einbettung der Hurewicz'schen in die Fox'schen Homotopiegruppen erhalten können. - Zum Schluß definieren wir einen Homomorphismus $k_*: \overline{\pi}_{n+r}(\lambda, x_0) \rightarrow \overline{\pi}_{n+p}(\lambda, x_0)$, der durch eine Funktion $k: (I^p, \dot{I}^p) \rightarrow (I^r, \dot{I}^r)$ induziert wird.

Wir beginnen mit einer Folgerung aus Satz 4.

Folgerung 1: Es sei A ein topologischer Raum und $A_1 \subset A$ ein Retrakt von A mit $\varphi: A \rightarrow A_1$ als Retraktion. Dann gilt:
 $\overline{\pi}_n(\lambda^A, 0) \approx \overline{\pi}_n(\lambda^{A_1}, 0) + \overline{\pi}_n(\lambda^A, \overline{\varphi}(\lambda^{A_1}), 0)$ für $n \geq 2$ und
 $\overline{\varphi}_*: \overline{\pi}_n(\lambda^{A_1}, 0) \rightarrow \overline{\pi}_n(\lambda^A, 0)$ ist ein Monomorphismus für alle $n \geq 1$.

Beweis: Wir betrachten das Tripel $(\lambda^A, \overline{\varphi}(\lambda^{A_1}), 0)$. Da $\overline{\varphi}(\lambda^{A_1})$ Retrakt von λ^A ist, gilt $\overline{\pi}_n(\lambda^A, 0) \approx \overline{\pi}_n(\overline{\varphi}(\lambda^{A_1}), 0) + \overline{\pi}_n(\lambda^A, \overline{\varphi}(\lambda^{A_1}), 0)$ für alle $n \geq 2$ und $i_*: \overline{\pi}_n(\overline{\varphi}(\lambda^{A_1}), 0) \rightarrow \overline{\pi}_n(\lambda^A, 0)$ ist ein Monomorphismus für alle $n \geq 1$ (man vgl. Hu [8], S. 150). Da $\overline{\varphi}: \lambda^{A_1} \rightarrow \overline{\varphi}(\lambda^{A_1}) \subset \lambda^A$ eine topologische Funk-

tion ist, sind die Gruppen $\overline{\pi}_n(X^A, 0)$ und $\pi_n(\overline{\xi}(X^A), 0)$ für alle n isomorph. Daraus folgt die Behauptung.

Wir haben hierbei, wie wir es auch im folgenden tun werden, die konstante Funktion $f: A \rightarrow X$ bzw. $f: A_1 \rightarrow X$, definiert durch $f(a) = x_0$ für alle a , kurz mit 0 bezeichnet. Das Symbol $\approx$ bezeichnet die Isomorphie (Isomorphie "auf") von Gruppen und das Zeichen $+$ steht für die direkte Summenbildung zweier Gruppen.

Folgerung 2: Es seien X und Y lokal kompakte und homotop äquivalente T_2 -Räume rel zu $\{x_0, y_0\}$. Dann sind für jeden topologischen Raum A die Gruppen $\pi_n(X^A, 0)$ und $\overline{\pi}_n(Y^A, 0)$ isomorph.

Folgerung 3: Es seien A und B lokal kompakte und homotop äquivalente T_2 -Räume. Dann sind für jeden topologischen Raum X die Gruppen $\overline{\pi}_n(X^A, 0)$ und $\overline{\pi}_n(X^B, 0)$ isomorph.

Bevor wir zu den neuen Homotopiegruppen übergehen, verallgemeinern wir noch kurz den Begriff des Funktionenraumes. Man vgl. Fox [6].

Definition 5: Es seien X und A topologische Räume und X_μ, A_μ seien Teilmengen von X bzw. A ($\mu \in M$, M sei eine Indexmenge). Mit $(X, X_\mu)^{(A, A_\mu)}$ bezeichnen wir den Unterraum von X^A , der alle Funktionen $f: A \rightarrow X$ enthält, für die $f(A_\mu) \subset X_\mu$ gilt. Entsprechend bezeichnen wir mit $(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}$ den Unterraum von X^A , der alle Funktionen $f: A \rightarrow X$ enthält, für die $f(A_\mu) \subset X_\mu$ für alle $\mu \in M$ gilt.

Es gilt offenbar $(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)} = \bigcap_{\mu \in M} (X, X_\mu)^{(A, A_\mu)}$. Die Abbildung $\sigma: X^{A \times B} \rightarrow (X^A)^B$ bildet $(X; X_\mu)^{(A \times B; A_\mu \times B_\mu)}$ ab in $(X^A; (X, X_\mu)^{(A, A_\mu)})^{(B; B_\mu)}$ und es gelten die Regeln:

1. $\{(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M\} = \{(X; X_\mu \cap_{v \in N} X_v)^{(A; A_\mu, A_v)}, \mu \in M \setminus N, \text{ wenn } A_\mu = A_v = A_{v_0} \text{ für } \mu, v, v_0 \in N \subset M\}$
2. $\{(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M\} = \{(\cap_{v \in N} X_v; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M \setminus N, \text{ wenn } A = A_\mu = A_v \text{ für } \mu, v \in N \subset M\}$
3. $\{(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M\} = \{(X; X_\mu, X)^{(A; A_\mu, \cup_{v \in N} A_v)}, \mu \in M \setminus N, \text{ wenn für } \mu, v, v_0 \in N \subset M \text{ gilt: } X_\mu = X_v = X_{v_0}\}$
4. $\{(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M\} = \{(X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, \mu \in M \setminus N, \text{ wenn } X = X_\mu \text{ für } \mu \in N \subset M \text{ gilt}\}$

Wir definieren nun die Gruppen, die wir im folgenden untersuchen wollen: Es sei $f \in (X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}$ eine vorgegebene Funktion. Dann setzen wir $(A; A_\mu)_{Q_I}(X; X_\mu) = \{g \in (X; X_\mu)^{(I \times A; I \times A_\mu)} \mid g|_{0 \times A} = g|_{1 \times A} = f\}$. Ist keine Verwechslung zu befürchten, so bezeichnen wir diese Menge kurz mit Q_I . Sind $g, h \in Q_I$, so definieren wir $g+h$ durch $(g+h)(t, a) = \begin{cases} g(2t, a) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1, a) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$. Dann ist $g+h \in Q_I$. g und h aus Q_I heißen homotop, wenn es eine Funktion $H: (I \times A) \times I \rightarrow X$ gibt, für die gilt: $H|(I \times A) \times 0 = g$, $H|(I \times A) \times 1 = h$ und $H|(I \times A) \times s \in Q_I$ ist, für beliebiges, festes $s \in I$. Bezeichnung: $g \approx h$. Diese Relation ist bekanntlich eine Äquivalenzrelation und wir bezeichnen die Klasse, zu der $g \in Q_I$ bzgl. dieser Relation gehört mit $[g]$, sowie die Menge der Äquivalenzklassen mit $f_{\Pi}^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu)$. In $f_{\Pi}^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu)$ führen wir analog zu den gewöhnlichen Homotopiegruppen eine Gruppenstruktur ein mittels der Definition $[g+h] = [g] + [h]$. Als Nullelement erhalten wir die Klasse der Funktion $d \in Q_I$, definiert durch $d(t, a) = f(a)$ für alle $t \in I$. Invers zu $[g]$ ist $[\tilde{g}] = [g(1-t, a)]$.

Spezialfälle:

1. $A = I^{n-1}$, $A_1 = I^{n-2} \times 0$, $A_2 = J^{n-2}$, $X_1 = X_1 \subset X$, $X_2 = x_0 \in X_1$,
 $f: I^{n-1} \rightarrow \lambda$ definiert durch $f(I^{n-1}) = x_0$. Dann gilt:
 $f_{\pi}(I^{n-1}, I^{n-2} \times 0, J^{n-2})(X, X_1, x_0) = \pi_n(X, X_1, x_0)$
2. $A = T^{n-2} \times I$, $A_1 = T^{n-2} \times 0$, $A_2 = T^{n-2} \times 1$, $X_1 = X_1 \subset \lambda$, $X_2 = x_0 \in X_1$,
 $f: T^{n-2} \times I \rightarrow \lambda$ definiert durch $f(T^{n-2} \times I) = x_0$. Dann gilt:
 $f_{\pi}(T^{n-2} \times I, T^{n-2} \times 0, T^{n-2} \times 1)(X, X_1, x_0) = \tau_n(X, X_1, x_0)$ [6]
3. $A = S^{n-1}$, $f: S^{n-1} \rightarrow \lambda$ definiert durch $f(S^{n-1}) = x_0$. Dann gilt:
 $f_{\pi}(S^{n-1})(\lambda) = \kappa_n(\lambda, x_0)$ [1]

Fall 1 liefert also die Hurewicz'schen, Fall 2 die Fox'schen und Fall 3 die Abe'schen Homotopiegruppen.

Im folgenden spezialisieren wir diese Gruppen wieder auf den Fall, bei dem für die Grundfunktion $f \in (\lambda; \lambda_{\mu})^{(A; A_{\mu})}$ gilt: $f(A) = x_0 \in \bigcap \lambda_{\mu} \neq \emptyset$. Die Gruppen bezeichnen wir kurz mit $\pi^{(A; A_{\mu})}(\lambda; \lambda_{\mu}, x_0)$.

Um uns kurz fassen zu können, setzen wir im folgenden die topologischen Räume A und X stets als lokal kompakte T_2 -Räume voraus. Wie weit man diese Bedingung im einzelnen abschwächen kann, geht aus den Sätzen des Kapitels II hervor.

Satz 1: Es gilt $\pi^{(A; A_{\mu})}(X; \lambda_{\mu}, x_0) \approx \pi_1(\{\lambda; \lambda_{\mu}\}^{(A; A_{\mu})}, 0)$

Beweis: Die Funktionenräume $(\lambda; \lambda_{\mu}, x_0)^{(I \times I \times A; I \times I \times A_{\mu}, I \times \dot{I} \times A)}$ und $((\lambda; \lambda_{\mu})^{(A; A_{\mu})}, 0)^{(I \times I, I \times \dot{I})}$ sowie $((\lambda; \lambda_{\mu})^{(A; A_{\mu})}, 0)^{(I, \dot{I})}^I$ sind nach Satz 1 von Kapitel I topologisch äquivalent.

Sind nun $f, g \in \mathcal{Q}_0$ homotop, so existiert eine Funktion h aus dem ersten Funktionenraum mit $h_0 = f$, $h_1 = g$. D.h. f und g gehören, aufgefaßt als Punkte des Funktionenraumes

$((X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, 0)^{(I, \dot{I})}$ zur gleichen Wegekomponente. Das Umgekehrte ist offenbar auch richtig. Es sei nun $\mathfrak{S}: (X; X_\mu, x_0)^{(1 \times A; 1 \times A_\mu, \dot{1} \times A)} \rightarrow ((X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, 0)^{(I, \dot{I})}$ die bekannte (nach Satz 1 Kapitel I topologische) Funktion. Es gilt: $\mathfrak{S}_0(f+g) = \mathfrak{S}_0(f) + \mathfrak{S}_0(g)$. Aus diesen Überlegungen folgt die Behauptung.

Satz 1 liefert z.B. die folgenden Isomorphismen:

$$\pi_n(X, x_0) \approx \pi_1((X, x_0)^{(I^{n-1}, \dot{I}^{n-1})}, 0)$$

$$\tau_n(X, x_0) \approx \pi_1(X^{T^{n-1}}, 0)$$

$$\mathfrak{u}_n(X, x_0) \approx \pi_1(X^{S^{n-1}}, 0)$$

Jede Funktion $f: (X; X_\mu, x_0) \rightarrow (Y; Y_\mu, y_0)$ induziert eine Abbildung $\hat{f}: (A; A_\mu) \underline{Q}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow (A; A_\mu) \underline{Q}(Y; Y_\mu, y_0)$ und da $\hat{f}(g+h) = \hat{f}(g) + \hat{f}(h)$ ist, induziert f den entsprechend definierten Homomorphismus $f_*: \pi^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow \pi^{(A; A_\mu)}(Y; Y_\mu, y_0)$.

Im Gegensatz hierzu induziert eine Funktion $\alpha: (A; A_\mu) \rightarrow (B; B_\mu)$ keinen entsprechenden Homomorphismus, denn $\bar{\alpha}$ braucht keineswegs relationstreu zu sein. Da aber α auch eine Funktion $\bar{\alpha}: ((X; X_\mu)^{(B; B_\mu)}, 0) \rightarrow ((X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, 0)$ induziert, und diese einen Homomorphismus von $\pi_1((X; X_\mu)^{(B; B_\mu)}, 0)$ in $\pi_1((X; X_\mu)^{(A; A_\mu)}, 0)$ induziert, können wir, auf Grund von Satz 1, dieser Funktion den Homomorphismus $\alpha_*: \pi^{(B; B_\mu)}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow \pi^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu, x_0)$ zuordnen, der durch $\alpha_* = \mathfrak{S}_*^{-1} \circ \bar{\alpha}_* \circ \mathfrak{S}_*$ definiert ist, wobei $\mathfrak{S}_*$ den von $\mathfrak{S}$ induzierten Isomorphismus bezeichnet.

Es ist klar, daß die so induzierten Homomorphismen nur von der Homotopieklasse der Funktion abhängen, von der sie induziert wurden.

Sind weiter f und g Funktionen der Funktionenräume $(Y; Y_\mu, y_0)^{(X; X_\mu, x_0)}$ bzw. $(X; X_\mu, x_0)^{(Y; Y_\mu, y_0)}$, derart daß $g \circ f \approx \text{Identität rel zu } \{X_\mu, X_\mu; x_0, x_0\}$ gilt, so ist $f_*: \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(Y; Y_\mu, y_0)$ ein Monomorphismus, $g_*: \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(Y; Y_\mu, y_0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(\lambda; X_\mu, x_0)$ ein Epimorphismus und $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \text{id}$.

Völlig entsprechend gilt für $a \in (B; B_\mu)^{(A; A_\mu)}$ und $b \in (A; A_\mu)^{(B; B_\mu)}$ mit $b \circ a \approx \text{Identität rel zu } \{A_\mu, A_\mu\}$, daß $b_*: \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}^{(B; B_\mu)}(X; X_\mu, x_0)$ ein Monomorphismus, $a_*: \overline{\mathbb{U}}^{(B; B_\mu)}(X; X_\mu, x_0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}^{(A; A_\mu)}(X; X_\mu, x_0)$ ein Epimorphismus und $a_* \circ b_* = \text{id}$ ist.

Wir definieren abschließend noch den Homomorphismus

$k_*: \overline{\mathbb{U}}_{n+r}(X, x_0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}_{n+p}(X, x_0)$, der durch eine Funktion $k: (I^p, \dot{I}^p) \rightarrow (I^r, \dot{I}^r)$ induziert wird.

Definition: Es sei eine Funktion $k \in (I^r, \dot{I}^r)^{(I^p, \dot{I}^p)}$ vorgelegt. Dann induziert k eine Funktion $\bar{k}: ((X, x_0)^{(I^r, \dot{I}^r)}, 0) \rightarrow ((X, x_0)^{(I^p, \dot{I}^p)}, 0)$, und $\bar{k}$ induziert $\hat{\bar{k}}: ((X, x_0)^{(I^r, \dot{I}^r)}, 0)^{(I^n, \dot{I}^n)} \rightarrow ((X, x_0)^{(I^p, \dot{I}^p)}, 0)^{(I^n, \dot{I}^n)}$ und $\hat{\bar{k}}$ induziert einen Homomorphismus $\hat{\bar{k}}_*: \overline{\mathbb{U}}_n((X, x_0)^{(I^r, \dot{I}^r)}, 0) \rightarrow \overline{\mathbb{U}}_n((X, x_0)^{(I^p, \dot{I}^p)}, 0)$. Die Gruppen $\overline{\mathbb{U}}_n((X, x_0)^{(I^r, \dot{I}^r)}, 0)$ und $\overline{\mathbb{U}}_{n+r}(X, x_0)$ und entsprechend die, bei denen p für r steht, sind auf natürliche Weise isomorph (man vgl. Hu [8], S. 109) und mittels dieses natürlichen Isomorphismus, den wir mit i bezeichnen, definieren wir k_* durch $k_* = i_p \circ \hat{\bar{k}}_* \circ i_r^{-1}$. k_* hängt wiederum nur von der Homotopieklasse von k ab. Da $\{[k]\}$ in einer ein-eindeutigen Beziehung zu den Elementen der Homotopiegruppe $\overline{\mathbb{U}}_p(S^r)$ stehen, können wir auch sagen: Jedes Element

$\alpha \in \overline{\Pi}_p(S^r)$ induziert einen Homomorphismus $\alpha_*: \overline{\Pi}_{n+r}(X, x_0) \rightarrow \overline{\Pi}_{n+p}(X, x_0)$.

Nicht-trivial können auf diese Art induzierte Homomorphismen natürlich nur für $p \geq r$ sein. Dann induziert uns aber jedes $\alpha \in \overline{\Pi}_p(S^r)$ einen Homomorphismus α_* in aufsteigender Richtung.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abe: Über die stetigen Abbildungen der n -Sphäre
in einen metrischen Raum
Japanese Journal of Mathematics, Transactions
and Abstracts, 16 (1940), 169-176
- [2] R.F. Arens: A Topology for Spaces of Transformations
Annals of Mathematics, 47 (1946), 480-495
- [3] B. Eckmann und P.J. Hilton: Group-Like Structures
in General Categories I
Mathematische Annalen, 145 (1962), 227-255
- [4] S. Eilenberg und N. Steenrod: Foundations of Algebraic
Topology
Princeton University Press, 1952
- [5] R.H. Fox: On Topologies for Function Spaces
Bulletin of the American Mathematical
Society, 51 (1945), 429-432
- [6] R.H. Fox: Homotopy Groups and Torus Homotopy Groups
Annals of Mathematics, 49 (1948), 471-510
- [7] P.J. Hilton: An Introduction to Homotopy Theory
Cambridge University Press, 1953
- [8] S.T. Hu: Homotopy Theory
Academic Press New York, 1959
- [9] W. Hurewicz: Beiträge zur Topologie der Deformationen
Koninklijke Akademie van Wetenschappen te
Amsterdam, 38 (1935), 112-119, 521-528 und
39 (1936), 117-126, 215-224

- [10] J.R. Jackson: Comparison of Topologies on Function
Spaces
Proceedings of the American Mathematical
Society, 3 (1952), 156-158
- [11] J.R. Jackson: Spaces of Mappings on Topological
Products with Applications to Homotopy
Theory
Proceedings of the American Mathematical
Society, 3 (1952), 327-333
- [12] J.L. Kelley: General Topology
Van Nostrand New York, 1955
- [13] N. Bourbaki: Topologie Générale, Chapitre 10
Espaces Fonctionnels
Actualités Scientifiques et Industrielles
1084
Hermann, Paris 1961

Lebenslauf

Ich, Ulrich Seip, wurde am 23. März 1937, als Sohn des Dipl.-Ing. Willy Seip und seiner Ehefrau Erna geb. Stammburger, in Berlin geboren.

Infolge der Kriegs- und Nachkriegszeit verbrachte ich meine Schuljahre in Sonneberg/Thüringen, Neustadt bei Coburg, Heidenheim an der Brenz und Karlsruhe, wo ich im März 1956 die Reifeprüfung am Helmholtz-Realgymnasium ablegte. Anschließend studierte ich an der Universität München und der Freien Universität Berlin Mathematik. Im Dezember 1960 legte ich an der Freien Universität Berlin die Diplom-Prüfung in Mathematik ab.

Von November 1961 bis Juni 1962 war ich als Assistent am mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach beschäftigt und bin seit November 1962 als wiss. Assistent an der Technischen Hochschule Darmstadt tätig.

Ulrich Seip

